數學傳播 50卷2期, pp. 129-132

對於兩個三角形面積的四則運算爲定值的動點軌跡之探討

周均庭 · 郭晉宇 · 周賢祐

壹、緣起

在座標平面上固定相異兩點 A、B, 若給定適當的正數 k, 對於 $\overline{PA}$ 與 $\overline{PB}$ 的四則運算, 我們已知:

$\overline{PA}+\overline{PB}=k$, P 點的軌跡可能爲: 橢圓或線段 $\overline{AB}$。

$|\overline{PA}-\overline{PB}|=k$, P 點的軌跡可能爲: 雙曲線或兩射線。

$\overline{PA}\times\overline{PB}=k$, P 點的軌跡爲: 卡西尼卵形線。

$\overline{PA}\div\overline{PB}=k$, P 點的軌跡可能爲: 阿波羅尼斯圓或直線。

我們思考, 若是固定相異兩線段 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$, 其中 A、B、C 三點形成三角形, 給定適當的正數 k, 則對於 $\triangle ABP$ 面積與 $\triangle BCP$ 面積的四則運算:

$\triangle ABP+\triangle BCP=k$、$|\triangle ABP-\triangle BCP|=k$、$\triangle ABP\times\triangle BCP=k$、$\triangle BCP=k\triangle ABP$,

P 點對應的軌跡是什麼? 於是我們開啟了這趟探究之旅。

貳、研究結果

定理 1: 在座標平面上給定一 $\triangle ABC$, 及正數 k,

(1) 若 $P(x,y)$ 滿足 $\triangle ABP$ 面積 $+\triangle BCP$ 面積 $=k$, 則 P 的軌跡爲一平行四邊形 Γ_1。

(2) 若 $P(x,y)$ 滿足 $|\triangle ABP$ 面積 $-\triangle BCP$ 面積$|=k$, 則 P 的軌跡爲 Γ_1 的四個邊所在的直線扣除 Γ_1。

證明: 不失一般性, 設 $A(-a,0)$、$B(b,c)$、$C(a,0)$, 其中 a、b、$c\in\mathbb{R}$ 且 $ac\neq 0$,

$$\triangle ABP\text{面積}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} b+a & c\\ x+a & y\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|-[cx-(a+b)y+ac]|,$$

$$\triangle BCP\text{面積}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} a-b & -c\\ x-b & y-c\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|cx+(a-b)y-ac|,$$

令 $X' = cx-(a+b)y+ac$、$Y' = cx+(a-b)y-ac$, 可知: $X' = 0$ 是直線 $\overleftrightarrow{AB}$、$Y' = 0$ 是直線 $\overleftrightarrow{BC}$。

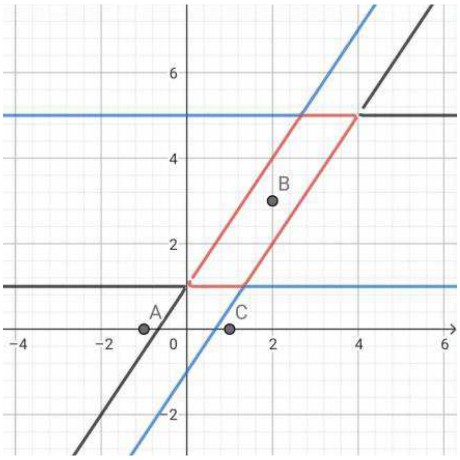
(1) 若 $\triangle ABP$ 面積 $+\triangle BCP$ 面積 $= k$, 則 $|X'|+|Y'| = 2k$, 而 $|X'|+|Y'| = 2k$ 在 $X'Y'$ 平面上是一平行四邊形, 四個邊所在的直線爲: $X'+Y' = \pm 2k$、$X'-Y' = \pm 2k$。由此可知 $P(x,y)$ 的軌跡爲一平行四邊形。

(2) 若 $|\triangle ABP$ 面積 $-\triangle BCP$ 面積 $| = k$, 則 $|(|X'|-|Y'|)| = 2k$, 即 $|X'|-|Y'| = \pm 2k$, 將 $|X'|+|Y'| = 2k$ 的圖形令爲 Γ_1、$|X'|-|Y'| = 2k$ 的圖形令爲 Γ_2、$|X'|-|Y'| = -2k$ 的圖形令爲 Γ_3, 我們有下列表格:

	$X' \geq 0,\ Y' \geq 0$	$X' \leq 0,\ Y' \geq 0$	$X' \leq 0,\ Y' \leq 0$	$X' \geq 0,\ Y' \leq 0$
Γ_1	$X'+Y' = 2k$	$-X'+Y' = 2k$	$-X'-Y' = 2k$	$X'-Y' = 2k$
Γ_2	$X'-Y' = 2k$	$-X'-Y' = 2k$	$-X'+Y' = 2k$	$X'+Y' = 2k$
Γ_3	$-X'+Y' = 2k$	$X'+Y' = 2k$	$X'-Y' = 2k$	$-X'-Y' = 2k$

由此可知: Γ_1、Γ_2、Γ_3 的聯集爲 $X'+Y' = \pm 2k$、$X'-Y' = \pm 2k$。$|\triangle ABP$ 面積 $-\triangle BCP$ 面積 $| = k$ 的圖形是 Γ_2、Γ_3 的聯集, 且其與 Γ_1 的交集爲「Γ_1 的四個頂點」, 故 $|\triangle ABP$ 面積 $-\triangle BCP$ 面積 $| = k$, P 的軌跡爲 Γ_1 的四個邊所在的直線扣除 Γ_1。 得證。

以 $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $k = 2$ 爲例, 用 GeoGebra 作圖如下:



Γ_1 : $|3x-3y+3|+|3x-y-3| = 4$, 顏色爲紅色,

Γ_2 : $|3x-3y+3|-|3x-y-3| = 4$, 顏色爲藍色,

Γ_3 : $|3x-3y+3|-|3x-y-3| = -4$, 顏色爲黑色。

定理 2: 在座標平面上給定一 $\triangle ABC$, $P(x,y)$ 滿足 $\triangle ABP$ 面積 $\times \triangle BCP$ 面積 $= k$, 其中 $k>0$, 則 P 的軌跡爲一組共軛雙曲線, 其中兩漸近線爲直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$。

證明: 如同定理 1 證明中的假設, 設 $A(-a,0)$、$B(b,c)$、$C(a,0)$, 其中 a、b、$c\in\mathbb{R}$ 且 $ac\neq 0$, 令 $X'=cx-(a+b)y+ac$、$Y'=cx+(a-b)y-ac$, 我們有

$$\triangle ABP\text{面積}\times\triangle BCP\text{面積}=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} b+a & c\\ x+a & y\end{vmatrix}\right\|\times\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} a-b & -c\\ x-b & y-c\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{4}|X'Y'|=k,$$

即 $X'Y'=\pm 4k$, 軌跡爲一組共軛雙曲線, 其中兩漸近線爲 $X'=0$、$Y'=0$, 爲直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$。 得證。

定理 3: 在座標平面上給定一 $\triangle ABC$, $P(x,y)$ 滿足 $\triangle BCP$ 面積 $= k\triangle ABP$ 面積, 其中 $k>0$, 則 P 的軌跡爲兩直線。

證明: 如同定理 1 證明中的假設, 設 $A(-a,0)$、$B(b,c)$、$C(a,0)$, 其中 a、b、$c\in\mathbb{R}$ 且 $ac\neq 0$, 我們有 $\left\|\begin{vmatrix} a-b & -c\\ x-b & y-c\end{vmatrix}\right\|=k\left\|\begin{vmatrix} b+a & c\\ x+a & y\end{vmatrix}\right\|$。

設 N_1 爲 $\overline{AC}$ 的內分點, N_2 爲 $\overleftrightarrow{AC}$ 上的外分點 (不在 $\overline{AC}$ 上) 滿足 $\overline{CN_1}=k\overline{AN_1}$, $\overline{CN_2}=k\overline{AN_2}$, 我們將證明:

(1) $k\neq 1$, P 的軌跡爲兩直線：$\overleftrightarrow{BN_1}$、$\overleftrightarrow{BN_2}$。

(2) $k=1$, P 的軌跡: 過 B 點及 $\overline{AC}$ 中點 M 的直線、過 B 點與 $\overline{AC}$ 平行的直線。

Case 1 : $\begin{vmatrix} a-b & -c\\ x-b & y-c\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} b+a & c\\ x+a & y\end{vmatrix}$。

化簡行列式: $(a-b)(y-c)+c(x-b)=k[(b+a)y-c(x+a)]\Rightarrow c(k+1)x+[-(k+1)b+(-k+1)a]y=ac(-k+1)$ 軌跡爲一直線 L_1, 過點 $B(b,c)$。

$k\neq 1$ 時, 由於 N_1 在 $\overline{AC}$ 上滿足 $\overline{CN_1}=k\overline{AN_1}$, 由內分點公式可得 $N_1\Big(\dfrac{(-k+1)a}{k+1},0\Big)$, 驗證可得 N_1 在 L_1 上。所以 $L_1=\overleftrightarrow{BN_1}$。$k=1$ 時, N_1 爲 $\overline{AC}$ 中點 M。所以 $L_1=\overleftrightarrow{BM}$。

Case 2 : $\begin{vmatrix} a-b & -c\\ x-b & y-c\end{vmatrix}=-k\begin{vmatrix} b+a & c\\ x+a & y\end{vmatrix}$。

化簡行列式: $(a-b)(y-c)+c(x-b)=-k[(b+a)y-c(x+a)]\Rightarrow c(k-1)x+[(-k+1)b+(-k-1)a]y=-ac(k+1)$ 軌跡爲一直線 L_2, 過點 $B(b,c)$。

$k\neq 1$ 時, 由於 N_2 在 $\overleftrightarrow{AC}$ 上 (不在 $\overline{AC}$ 上) 滿足 $\overline{CN_2}=k\overline{AN_2}$, 由外分點公

式可得 $N_2\left(\frac{-(k+1)a}{k-1},0\right)$, 驗證可得 N_2 在 L_2 上, 所以 $L_2=\overleftrightarrow{BN_2}$。$k=1$ 時, $L_2: y=c$, 是過 B 點與 $\overline{AC}$ 平行的直線。 得證。

致謝: 感謝彰化師範大學數學系蔡宗龍教授、彰化高中龔詩尹老師及林典蔚老師指導。

參考文獻

1. 圓錐曲線 — 維基百科。
2. 卡西尼卵形線 — 維基百科。
3. 阿波羅尼斯圓 — 維基百科。

—本文作者周均庭、郭晉宇、周賢祐投稿時就讀彰化高中高二數理資優班—

勘誤表

第 47 卷 2 期, 第 37 頁 line -2。

原爲：**註四**、回顧對圖周長的討論,

應爲：**註四**、回顧對圓周長的討論,

第 49 卷 3 期, 第 106 頁內文 line -1。

原爲：不與任何 b_j 同餘

應爲：不與任何 c_j 同餘

第 49 卷 3 期, 第 107 頁內文 line 4 右邊。

原爲：$\pmod{(p)}$

應爲：$\pmod p$

第 49 卷 4 期, 第 69 頁內文 line -8。

原爲：憑心而論

應爲：平心而論

第 50 卷 1 期, 第 88 頁 line 2, 4。

原爲：Line 2: $\cos^3\theta-\frac{1}{2}cos^2\theta-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{8}=0$,

Line 4: $(cos^3\theta-3\cdot\cos^2\theta\cdot\frac{1}{6}+$

應爲：Line 2: $\cos^3\theta-\frac{1}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{8}=0$,

Line 4: $(\cos^3\theta-3\cdot\cos^2\theta\cdot\frac{1}{6}+$

第 50 卷 1 期, 第 107 頁 line 9。

原爲：$=2+3\cdot(a^2+b^2)^{1/3}\cdot x$,

應爲：$=2a+3\cdot(a^2+b^2)^{1/3}\cdot x$,